

Правительство Российской Федерации

**Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики»**

Кафедра Высшей математики

**Программа дисциплины «Методы оптимизации и их
приложения в экономике»**

Автор программы:

Шнурков Петр Викторович

Одобрена на заседании кафедры «___» _____ 2012 г.

Зав. кафедрой Четвериков В.М.

Рекомендована секцией УМС «___» _____ 2012 г.

Утверждена УС факультета «___» _____ 2012 г.

Москва 2012

Содержание комплекса

Пояснительная записка	3
Введение	4
Общая методическая характеристика дисциплины	5
Учебно-тематический план дисциплины	7
Содержание дисциплины	9
План занятий	10
Список основной и дополнительной литературы	14

*Пояснительная записка к курсу
«Методы оптимизации и их приложения в
экономике»*

Введение

Курс “Методы оптимизации и их приложения в экономике” является специальным учебным курсом и читается для студентов одной учебной группы факультета прикладной математики, обучающихся по специальности “Математические методы в экономике”. Занятия по данной учебной дисциплине проводятся в течение одного семестра, а именно, восьмого семестра (четвертый курс). Согласно учебному плану по данной дисциплине предусмотрены следующие виды аудиторных учебных занятий: 1 час лекций в неделю, 1 час семинарских занятий в неделю. Кроме этого, в рамках данной дисциплины проводится курсовая работа, на которую также отводится 1 час занятий в неделю.

Поскольку объем часов, отведенных на изучение данной дисциплины, является крайне ограниченным, я счел целесообразным не придерживаться формального разделения учебных занятий на лекционные и семинарские, а проводить единые занятия, по форме более близкие к лекционным. При этом на таких занятиях используются некоторые формы работы, более характерные для семинарских занятий: исследование конкретных оптимизационных задач, живое общение со слушателями. Такая форма работы позволяет рассмотреть многие теоретические вопросы и в то же время подготовить слушателей к выполнению различных видов самостоятельной работы.

Сделаем теперь некоторые замечания по содержанию курса. Количество оптимизационных задач, возникающих в различных экономических моделях, очень велико. Эти задачи очень разнообразны по своей математической форме и методам решения. Рассмотреть все эти задачи или их большинство в рамках данного учебного курса, даже гораздо более объемного, чем данный, невозможно. В связи с этим я как лектор и автор методической концепции курса принял решение составить его из нескольких разделов, в которых рассматриваются различные экономические модели. Перечислим эти задачи и методы их исследования.

1 Задача оптимального управления в динамической односекторной модели экономики (модель оптимального экономического роста). Задача исследуется при помощи метода максимума Понтягина.

2 Задача оптимального распределения ресурсов (в стационарном режиме) в трехсекторной модели экономики. По форме данная задача представляет собой конечномерную задачу оптимизации и решается при помощи классического метода множителей Лагранжа.

3 Задача оптимального управления запасом непрерывного продукта в стохастической модели регенерации. Задача решается на основе теории экстремума дробно-линейного функционала и при использовании аналитических методов поиска экстремума функции одной вещественной переменной.

Исследование указанных моделей и методов позволит слушателям данного курса получить общее представление о современной теории оптимизации в экономических моделях и в то же время достаточно глубоко изучить некоторые конкретные фундаментальные проблемы оптимизации в экономике.

П.В. Шнурков

Общая методическая характеристика дисциплины

Программа курса «Методы оптимизации и их приложения в экономике» предназначена для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности «математические методы в экономике» (080116) и (061800) и является единой для всех форм обучения.

Дисциплина «Методы оптимизации и их приложения в экономике» является специальной дисциплиной.

Цели и задачи дисциплины

Целью преподавания данной дисциплины является получение фундаментальных знаний по основам математической теории оптимизации и оптимального управления, используемых для анализа экономических систем.

Задача преподавания дисциплины состоит в создании у студентов устойчивого представления о современных математических методах оптимизации, используемых при анализе экономических систем.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины (требования к знаниям, умениям и навыкам, приобретенным в результате изучения дисциплины)

- 1) знание основных способов построения математических моделей функционирования экономических систем.
- 2) знание фундаментальных основ теории построения моделей управления статическими и динамическими экономическими системами.
- 3) знание основных фактов (понятий, определений, соотношений и утверждений), характеризующих рассматриваемые в данном курсе математические модели оптимизации экономических систем.
- 4) умение устанавливать связь между различными результатами и свойствами рассмотренной теории оптимизации экономических моделей
- 5) умение осмысливать математические обоснования результатов теории, разбираться в аналитических выводах и доказательствах утверждений.
- 6) умение проводить логические рассуждения и аналитические выводы, аналогичные тем, которые используются при изучении данной дисциплины.
- 7) умение использовать учебную и учебно-научную литературу для уточнения и осмысления результатов, приведенных в ходе изучения данной дисциплины.
- 8) умение использовать полученные знания для изучения новых разделов теории оптимизации и управления экономическими системами.
- 9) навыки работы с учебной литературой, нахождения и самостоятельного изучения необходимых материалов по данному курсу.
- 10) навыки самостоятельного изучения материалов лекций.
- 11) навыки самостоятельного анализа и решения задач, предлагаемых на занятиях и контрольных работах.

Оценка результатов работы студента.

Пункты 1, 2, 3, 7 (частично) 10, 11 характеризуют минимальный объем знаний, умений и навыков, которыми должен обладать студент в результате изучения данного курса.

Основание курса в объеме пунктов 4, 5, 9 соответствуют хорошему, добротному уровню приобретенных знаний, умений и навыков. Пункты 6, 7 (в достаточно полном объеме), 8

характерны для высокого уровня овладения дисциплиной, на таком уровне могут работать только наиболее подготовленные и добросовестные студенты.

Учебно-тематический план дисциплины

В первой графе таблицы указываются виды аудиторных и самостоятельных занятий студентов. Во второй графе указывается общая трудоемкость дисциплины в соответствии с ГОС ВПО, объем аудиторных и самостоятельных занятий – в соответствии с примерным учебным планом. В третьей и четвертой графе указываются номера семестров (если их два), в которых предусматривается каждый вид учебной работы и вид итогового контроля по дисциплине.

Объем дисциплины и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
		8
Общая трудоемкость дисциплины	70	70
Аудиторные занятия	51	51
Лекции (Л)	17	17
Практические занятия (ПЗ)		
Семинары (С)	17	17
Лабораторные работы (ЛР)		
И (или) другие виды аудиторных занятий		
Самостоятельная работа	19	19
Курсовой проект (работа)	17	17
Расчетно-графические работы		
Реферат		
И (или) другие виды самостоятельной работы		
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)		зачет (с оценкой)

Учебно-тематический план дисциплины

В учебно-тематическом плане приводится перечень тем, которые могут делиться на разделы и части. После этого размещается подробное содержание тем курса, дополненное Семинарскими или практическими занятиями, самостоятельной работой (с целями и задачами). Обязательно приводится ссылка на литературу и знания и умения студента, полученные после изучения раздела.

N п/п	Раздел дисциплины	Аудиторные занятия		
		Лекции	Семинары	Лабор. работы
1.	Описание и исследование динамических моделей экономических систем	6		
2.	Оптимальное управление в неоклассической модели экономического роста (модель Рамсея)	8		
3.	Проблема оптимального распределения ресурсов в модели трехсекторной экономики	8		
4.	Математические модели управления запасами	12		

Содержание разделов дисциплины.

1. Описание и исследование динамических моделей экономических систем (6 часов).
Понятие экономической системы. Статические и динамические системы.
Производственные функции. Экономические системы с управлением.

Классические динамические модели, используемые в дальнейшем изложении.
Основные параметры и математические соотношения, определяющие каждую модель.

Модель Солоу с дискретным и непрерывным временем.

Исследование переходных процессов и стационарного режима в модели Солоу с непрерывным временем. Поведение функции фондовооруженности при длительной эволюции системы.

2. Оптимальное управление в неоклассической модели экономического роста (модель Рамсея) – (8 часов).

Описание неоклассической модели экономического роста; основные параметры и соотношения, связь с моделью Солоу с непрерывным временем.

Постановка задачи оптимального управления. Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтрягина.

Определение стационарных значений параметров в задаче управления. Исследование переходных процессов в неоклассической модели управления для параметров состояния системы (фондовооруженности) и сопряженной переменной. Определение вариантов устойчивого экономического развития и перехода на стационарные режимы.

3. Проблема оптимального распределения ресурсов в модели трехсекторной экономики (8 часов).

Описание модели трехсекторной экономики. Структура секторов, особенности производства и распределения продукции.

Основные параметры и соотношения, характеризующие математическую модель трехсекторной экономики. Наличие связей и взаимодействий в данной экономической системе.

Описание математической модели трехсекторной экономики в терминах относительных показателей. Стационарные значения этих показателей и понятие стационарного режима в системе.

Математическая постановка задачи оптимального распределения инвестиционных и трудовых ресурсов в модели трехсекторной экономики. Представление проблемы распределения ресурсов в виде нелинейной экстремальной задачи в пространстве шести переменных.

Исследование экстремальной задачи и определение оптимального набора относительных параметров, характеризующих распределение инвестиций и трудовых ресурсов по секторам.

4. Математические модели управления запасами (12 часов).

Общая характеристика проблемы управления запасами в экономических системах. Структура и составные части модели управления запасом. Описание и классификация каждой из составных частей модели управления запасом.

Классическая детерминированная модель управления запасом. Описание модели, характеристики расходования и пополнения запаса. Вывод формул для функции затрат, связанных с функционированием данной системы за один период, и функции удельных затрат, отнесенных к единице времени. Определение оптимальных параметров системы, доставляющих минимум функции удельных затрат. Исследование частных случаев детерминированной модели управления запасом при малых параметрах. Вывод формул Уилсона.

Стохастическая модель управления запасом. Описание динамической модели потребления и пополнения запаса некоторого непрерывного продукта. Основная идея управления: параметр управления в данной модели является, вообще говоря, случайным и по содержанию представляет собой время от очередного пополнения запаса до момента заказа на следующее пополнение. Модель управления запасом как регенерирующий процесс. Стоимостные характеристики модели.

Получение представлений для функционалов, характеризующих качество управления системой (средние удельные затраты на периоде регенерации, средняя удельная прибыль на периоде регенерации).

Применение теории экстремума дробно-линейного функционала для решения задачи оптимального управления по отношению к указанным видам функционалов. Детерминированный характер оптимального управления.

Аналитическое исследование показателей качества управления и определение оптимальных значений параметров управления.

Понедельный план занятий лекционных и практических.

Раздел 1. Описание и исследование динамических моделей экономических систем.

Занятие 1.

Введение. Общая характеристика курса. Основное содержание самостоятельной работы: курсовая работа, домашние задания. Анализ литературы. Формирование тем для самостоятельных научных разработок.

Экономическая система (общее понятие). Статистические и динамические системы. Производственные функции. Системы с управлением. Структура управляемой системы, основные параметры, связи.

Занятие 2.

Динамические модели в экономике. Основные структуры. Модель Солоу с дискретным временем. Основные параметры и соотношения.

Модель Солоу с непрерывным временем. Основные соотношения между параметрами. Структурная схема взаимосвязей в модели Солоу.

Занятие 3.

Модель Солоу с непрерывным временем при наличии промежуточного продукта. Описание модели. Переход к относительным параметрам. Подготовительные результаты.

Исследование переходных процессов и стационарного режима в модели Солоу с непрерывным временем. Поведение функции фондовооруженности при различных соотношениях между параметрами системы.

Раздел 2. Оптимальное управление в неоклассической модели экономического роста (модель Рамсея).

Занятие 4.

Неоклассическая модель экономического роста как односекторная (однопродуктовая) модель экономики при наличии управления. Параметры состояния системы (фондовооруженность или удельный капитал) и управления системой (удельное потребление). Соотношения между параметрами системы, возникающие на основе модели

Солоу. Основные составные части задачи управления (целевой функционал, дифференциальная связь, граничное условие - закрепленный левый конец траектории, ограничения на управление). Бесконечный временной горизонт рассматриваемой модели. Экономическое содержание основных составных частей задачи управления.

Математическая постановка задачи оптимального управления.

Занятие 5.

Необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтягина в задаче оптимального управления односекторной экономической системой (неоклассической задаче экономического роста). Неизвестные параметры в задаче оптимального управления. Полная система соотношений, необходимая для определения неизвестных параметров, включая необходимые условия и ограничения исходной задачи.

Преобразование сопряженного уравнения. Анализ условия максимума и получение соотношения, определяющего структуру оптимального управления

Стационарные значения основных параметров и понятие стационарного режима в задаче оптимального управления. Экономическое содержание стационарного режима.

Занятие 6.

Исследование переходных процессов или поведения основных параметров в задаче оптимального управления (неоклассической модели экономического роста) при различных видах управления. Понятие интегральных кривых дифференциального уравнения для состояния системы (фондовооруженности) при различных начальных условиях.

Исследование решений дифференциального уравнения относительно сопряженной переменной и их влияние на поведение состояния системы.

Варианты достижения в системе стационарного режима.

Занятие 7.

Исследование переходных процессов в неоклассической модели экономического роста (завершение анализа). Подведение итогов анализа переходных процессов, выделение вариантов устойчивого экономического развития.

Раздел 3. Проблема оптимального распределения ресурсов в модели трехсекторной экономики.

Занятие 8.

Описание модели трехсекторной экономики. Структура секторов, особенности производства и распределения продукции.

Основные параметры модели трехсекторной экономики. Соотношения, определяющие характер изменения основных параметров, образуют следующие группы:

- 1) соотношения, характеризующие изменение объема основных производственных фондов (капитала);
- 2) соотношения, определяющие объем произведенного продукта;
- 3) балансовые соотношения.

Структурная схема трехсекторной модели экономики. Наличие связей и взаимодействий в экономической системе.

Занятие 9.

Преобразование основных соотношений в трехсекторной модели экономики. Переход к соотношениям для удельных (относительных) показателей.

Стационарные значения параметров системы. Понятие стационарного режима. Вывод формул для стационарных значений параметров фондовооруженности и удельного производства в каждом секторе.

Занятие 10.

Постановка задачи оптимального распределения инвестиционных и трудовых ресурсов в модели трехсекторной экономики.

Формализация проблемы оптимального распределения ресурсов в виде нелинейной экстремальной задачи в пространстве шести переменных, связанных тремя ограничениями (соотношениями баланса).

Описание и обсуждение двухступенчатого варианта метода множителей Лагранжа, предназначенного для решения указанной экстремальной задачи.

Занятие 11.

Реализация двухступенчатого метода множителей Лагранжа в задаче оптимального распределения ресурсов в модели трехсекторной экономики. Вывод соотношений, позволяющих определить оптимальные значения параметров распределения инвестиций и трудовых ресурсов по отдельным секторам экономики. Завершение анализа трехсекторной модели экономики, заключительные замечания о задачах оптимального управления, связанных с этой моделью.

Раздел 4. Математические модели управления запасами.

Занятие 12.

Общая характеристика проблемы управления запасом в экономике. Структура и составные части модели управления запасом. Краткое описание и классификация каждой из составных частей модели управления. Особенности математических моделей, связанных с различными видами систем управления запасом.

Классическая детерминированная модель управления запасом. Описание модели. Основной параметр, описывающий уровень запаса; его непрерывный характер и динамика изменения. Траектория процесса, ее периодичность. Проблема управления как задача определения оптимальных параметров системы.

Занятие 13.

Математический анализ детерминированной модели управления запасом. Вывод формулы для функции затрат, связанных с функционированием системы за период работы. Удельные затраты, отнесенные к единице времени.

Математическая постановка задачи управления запасом как проблема определения оптимальных параметров \hat{Y}^* , T^* , доставляющих минимум функции удельных затрат $L_1 = L_1(\hat{Y}, T)$, где \hat{Y} – максимальный уровень запаса, T – длительность периода работы системы.

Занятие 14.

Исследование условий стационарности для функции удельных затрат $L_1 = L_1(\hat{Y}, T)$ и определение оптимальных параметров управления запасом \hat{Y}^* , T^* .

Определение дополнительных параметров модели, соответствующих оптимальным значениям \hat{Y}^* , T^* .

Исследование частных случаев детерминированной модели управления запасом при малых параметрах. Вывод формул Уилсона.

Занятие 15.

Стохастическая модель управления запасом. Описание динамической модели потребления и пополнения запаса некоторого непрерывного продукта. Основная идея управления: параметр управления данной модели является, вообще говоря, случайным и по содержанию представляет собой время от очередного пополнения запаса до момента заказа на следующее пополнение. Модель управления запасом как регенерирующий процесс. Общая постановка задачи оптимального управления как выбор распределения параметра управления, доставляющего экстремум некоторому заданному функционалу.

Стоимостные характеристики модели, описывающие затраты на хранение продукта, штрафы, связанные с дефицитом, и доходы от поставки продукта непосредственному потребителю.

Занятие 16.

Получение представлений для функционалов, характеризующих качество управления системой (средние удельные затраты на периоде регенерации, средняя удельная прибыль на периоде регенерации). Дробно-линейная структура данных функционалов по отношению к распределению параметра управления.

Краткое изложение теории экстремума дробно-линейного функционала. Утверждение о достижении экстремума на вырожденных распределениях. Детерминированный характер оптимального управления. Сведение проблемы оптимального управления процессом к задаче поиска глобального экстремума заданной функции одной вещественной переменной.

Занятие 17.

Аналитическое исследование проблемы оптимального управления. Формулировка основных утверждений (теорем) о глобальных экстремумах функций, выражающих показатели качества управления системой (средние удельные затраты на периоде регенерации, средняя удельная прибыль на периоде регенерации).

Некоторые специальные варианты проблемы оптимального управления запасом, возникающие при линейных стоимостных характеристиках модели и линейных функциях, выражающих длительность задержки поставки. Получение явных аналитических формул для оптимальных значений параметров управления запасом (полное математическое решение проблемы оптимального управления).

Заключительные замечания. Завершение курса.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002
2. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.:ЮНИТИ, 2002
3. Математические методы принятия решений в экономике. Под ред. В.А. Колемаева. – М.:ЗАО "Финстатинформ", 1999

Дополнительная литература:

1. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике. – М.: Наука, 1999
2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 1997
3. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. (учебно-практическое пособие) – М.: УРАО, 1998
4. Основы теории оптимального управления. Под ред. В.Ф. Кротова. – М.:Высшая школа, 1990
5. Рубальский Г.Б. Управление запасами при случайном спросе. (модели с непрерывным временем). – М.: Сов.радио, 1977
6. Рыжиков Ю.И. Управление запасами. – М.: Наука, 1969
7. Blanchard O., Fischer S. Lectures on Macroeconomics. – Cambridge, MS: The MIT Press, 1989
8. Dixit A. Optimization in Economic Theory. Second Edition. – Oxford University Press, 1990
9. Leonard D., Long N. Optimal control theory and static optimization in economics. – Cambridge University Press, 1992